V-18 (1 h, 15 min) 5-Mayo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Notación relativista**

Se recomienda ver videos 18 y 19 del curso de RG y 15, 16 y 17 de Grupos de Lie

Notación de coordenadas en el espacio-tiempo de Minkoswki

$\left(\boldsymbol{x^0} \equiv ct\,; \boldsymbol{x^1} \equiv x\,;\ \boldsymbol{x^2} \equiv y\,;\ \boldsymbol{x^3} \equiv z\right)$ se resume poniendo $(\boldsymbol{ct}, \vec{\boldsymbol{x}}) \equiv (\boldsymbol{x})$

Transformaciones de Lorentz en espacio-tiempo Minkowski (2D para simplificar)

Relación entre coordenadas ¿cuándo y dónde? $(x^0, x^1) \leftrightarrow (x^{0\prime}, x^{1\prime})$ asignan a un mismo evento dos observadores con velocidad relativa **v**, con la condición de que la velocidad de la luz "c" sea invariante para los dos:

$$\boldsymbol{x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \beta x^1)} \qquad \boldsymbol{x^0 = \gamma(x^{0\prime} + \beta x^{1\prime})} \qquad \beta = \frac{v}{c}\ ;\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boldsymbol{x^{1\prime} = \gamma(x^1 - \beta x^0)} \qquad \boldsymbol{x^1 = \gamma(x^{1\prime} + \beta x^{0\prime})}$$

Se pueden reordenar las expresiones y ponerlas en formato matricial:

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}} \qquad \boldsymbol{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix}}$$

Compactando y llamando a las matrices (x´) , (x) y Λ

$$(\boldsymbol{x'}) = \boldsymbol{\Lambda} \cdot (\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Lambda^{-1}} \cdot (\boldsymbol{x'})$$

Invariante Poincare

Toda teoría (ley física) en ausencia de gravedad, es decir, en espacio-tiempo plano tiene que cumplir:

- Ser invariante bajo traslación (la misma ley al trasladarse a otro punto del espacio-tiempo)
- Ser invariante bajo transformación de Lorentz (velocidad de luz es constante universal)

Vector espaciotemporal en Minkowski (2D para simplificar, podría generalizarse a cuadrivector)

$\boldsymbol{\underline{A} = A^0 e_0 + A^1 e_1}$ conecta dos eventos del espacio-tiempo, siendo {e_0, e_1} la base ortogonal de dicho espacio-tiempo

$$|\underline{\boldsymbol{A}}|^2 = (A^0 e_0 + A^1 e_1)\cdot(A^0 e_0 + A^1 e_1) = (A^0)^2(e_0 e_0) + A^0 A^1(e_0 e_1) + A^1 A^0(e_1 e_0) + (A^1)^2(e_1 e_1) = Nº$$

Hemos utilizado la linealidad del producto escalar. Llamamos $\boldsymbol{\eta_{ij}} = \left(\boldsymbol{e_i e_j}\right)$ como elementos de una matriz (**Métrica**) y podemos poner en formato matricial:

$$|\underline{\boldsymbol{A}}|^2 = (A^0 \quad A^1)\begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} \\ \eta_{10} & \eta_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix} = Nº$$

Desde dos SR inerciales la conexión entre dos eventos será: $\underline{A} = A^0 e_0 + A^1 e_1$ y $\underline{A'} = A^{0\prime} e_{0'} + A^{1\prime} e_{1'}$

Pero el módulo de ambos (intervalo espaciotemporal) debe ser invariante bajo T de Lorentz: $|\underline{\boldsymbol{A}}|^2 = |\underline{\boldsymbol{A'}}|^2$

Con notación matricial ponemos: $|\underline{A'}|^2 = A'^T \eta\ A'$ y $|\underline{A}|^2 = A^T \eta\ A$.

También se cumple T. de Lorentz: $A' = \Lambda\ A$

Luego ponemos: $|\underline{A'}|^2 = (\Lambda\ A)^{\mathrm{T}}\ \eta\ (\Lambda\ A) = A^T \Lambda^{\mathrm{T}} \eta\ \Lambda\ A = A^T\left(\Lambda^{\mathrm{T}} \eta\ \Lambda\ \right)A \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \left(\boldsymbol{\Lambda^{\mathrm{T}} \eta\, \Lambda}\ \right)$

Condición para que el módulo de $\underline{\boldsymbol{A}}$ sea invariante Lorentz. Se puede comprobar fácilmente que se cumple con:

$$\boldsymbol{\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \text{ o bien } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (ésta última se emplea en relatividad)

(Se cumple con cualquier cte. en lugar de los unos)

$$|\underline{\boldsymbol{A}}|^2 = (A^0 \quad A^1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{A^0}\right)^2 - \left(\boldsymbol{A^1}\right)^2 = \left(\boldsymbol{A^{0\prime}}\right)^2 - \left(\boldsymbol{A^{1\prime}}\right)^2 = \boldsymbol{Nº}$$

Ese ***Nº*** invariante (intervalo espaciotemporal): $|\underline{\boldsymbol{A}}|^2 = \Delta \boldsymbol{s^2} = \boldsymbol{c^2}\Delta \boldsymbol{t^2} - \Delta \boldsymbol{x^2}$ *puede ser* $\begin{cases} > 0\ \textit{Time like} \\ < 0\ \textit{Space like} \\ = 0\ \textit{Light like} \end{cases}$

(En relatividad cambian los signos y esos nombres)

Paso de vector espacio-temporal con componentes contravariantes (A^0, A^1) a componentes covariantes (A_0, A_1)

Se bajan índices con: $\boldsymbol{A_i = \eta_{ij}A^j}$ (criterio de Einstein para sumatorios). Con la métrica de Minkowski (2D) tenemos:

$$A_0 = \eta_{00}A^0 + \eta_{01}A^1 = 1 \cdot A^0 + 0 \cdot A^1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_0 = A^0}$$

$$A_1 = \eta_{10}A^0 + \eta_{11}A^1 = 0 \cdot A^0 + (-1) \cdot A^1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_1 = -A^1}$$

Resultado que es generalizable a Minkoewski (4D): $\boldsymbol{A_2 = -A^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{A_3 = -A^3}$

Notación para las derivadas parciales

$$\boldsymbol{\partial_0} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial ct} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \;;\quad \boldsymbol{\partial_1} = \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x} \;;\quad \boldsymbol{\partial_2} = \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \;;\quad \boldsymbol{\partial_3} = \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Derivadas parciales con el índice arriba: $\boldsymbol{\partial^0 = \partial_0 \;;\quad \partial^1 = -\partial_1 \;;\quad \partial^2 = -\partial_2 \;;\quad \partial^3 = -\partial_3}$

Leyes (ecuaciones mateméticas) invariantes bajo transformaciones de Lorentz

La ecuación que cumple una magnitud ϕ que se propaga en forma de ondas de velocidad **c** es:

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$ puesta con la notación anterior: $\boldsymbol{[\partial_0{}^2 - \partial_1{}^2]\phi = 0}$

Esta es un ejemplo de ecuación invariante de Lorentz: La función $\phi(x^0, x^1)$ desde otro SR inercial es $\phi(x^{0\prime}, x^{1\prime})$
Utilizando las transformaciones de Lorentz para relacionar $\boldsymbol{\phi(x^0, x^1) \leftrightarrow \phi(x^{0\prime}, x^{1\prime})}$ y la regla de la cadena de las derivadas, en el video se demuestra:

$$\boldsymbol{[\partial_0{}^2 - \partial_1{}^2]\phi = \ldots\ldots = [\partial_{0'}{}^2 - \partial_{1'}{}^2]\phi}$$

Para efectuar la demostración suponemos que ϕ está en función de las nuevas coordenadas (primadas): $\boldsymbol{\phi(x^{0\prime}, x^{1\prime})}$ y utilizamos la regla de la cadena para las derivadas de ϕ:

$$\partial_0\, \phi(x^{0\prime}, x^{1\prime}) = (\partial_{0'}\, \phi)(\partial_0 x^{0\prime}) + (\partial_{1'}\, \phi)(\partial_0 x^{1\prime}) = (\partial_{0'}\, \phi)(\gamma) + (\partial_{1'}\, \phi)(-\gamma\beta) = \gamma[\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}]\phi$$

Para hallar la derivada segunda reiteramos el operador anterior $\gamma[\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}]$ que es como elevarlo al cuadrado:

$$\partial_0{}^2\phi(x^{0\prime}, x^{1\prime}) = \gamma^2[\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}]^2\phi = \gamma^2\left[\partial_{0'}{}^2 + \beta^2\partial_{1'}{}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right]\phi$$

De la misma forma hacemos:

$$\partial_1\, \phi(x^{0\prime}, x^{1\prime}) = (\partial_{0'}\, \phi)(\partial_1 x^{0\prime}) + (\partial_{1'}\, \phi)(\partial_1 x^{1\prime}) = (\partial_{0'}\, \phi)(-\gamma\beta) + (\partial_{1'}\, \phi)(\gamma) = \gamma[\partial_{1'} - \beta\partial_{0'}]\phi$$

$$\partial_1{}^2\phi(x^{0\prime}, x^{1\prime}) = \gamma^2[\partial_{1'} - \beta\partial_{0'}]^2\phi = \gamma^2\left[\partial_{1'}{}^2 + \beta^2\partial_{0'}{}^2 - 2\beta\partial_{1'}\partial_{0'}\right]\phi$$

Restamos para hallar: $[\partial_0{}^2 - \partial_1{}^2]\phi = \gamma^2\left[\partial_{0'}{}^2 + \beta^2\partial_{1'}{}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right]\phi - \gamma^2\left[\partial_{1'}{}^2 + \beta^2\partial_{0'}{}^2 - 2\beta\partial_{1'}\partial_{0'}\right]\phi$

Teniendo en cuenta que es igual el orden en el que se realicen las derivadas parciales $\partial_{0'}\partial_{1'} = \partial_{1'}\partial_{0'}$, al simplificar y sacar factor común, queda:

$$[\partial_0{}^2 - \partial_1{}^2]\phi = \gamma^2(1-\beta^2)[\partial_{0'}{}^2 - \partial_{1'}{}^2]\phi = \frac{1}{1-\beta^2}(1-\beta^2)[\partial_{0'}{}^2 - \partial_{1'}{}^2]\phi = [\partial_{0'}{}^2 - \partial_{1'}{}^2]\phi$$

EJERCICIO: comprobar que la ecuación $\boldsymbol{[\partial_0 - \partial_1{}^2]\phi = 0}$ **NO es invariante Lorentz**

Esta ecuación es de la misma estructura que la ecuación de Schrödinger: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi - \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\phi = 0$

Utilizando los resultados anteriores: $\partial_0\, \phi = \gamma[\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}]\phi$ y $\partial_1{}^2\phi = \gamma^2\left[\partial_{0'}{}^2 + \beta^2\partial_{1'}{}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right]\phi$

Al restar: $\partial_0\, \phi - \partial_1{}^2\phi = \gamma[\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}]\phi - \gamma^2\left[\partial_{0'}{}^2 + \beta^2\partial_{1'}{}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right]\phi$ es obvio que no es invariante.

La ecuación de Schrödinger no es invariante Lorentz, luego no es relativista y sólo será válida para velocidades pequeñas de la partícula.